

Задаци - четврта недеља

задаци са * су посебно важни

1. Нека је за $x \in [-1, 1]$ дефинисан низ функција

$$f_n(x) = \frac{x^2}{n+1}, \quad n \in \mathbb{N}.$$

- Доказати да низ (f_n) униформно конвергира на интервалу $[-1, 1]$.
- Доказати да низ извода (f'_n) униформно конвергира $[-1, 1]$.
- Проверити да важи

$$\left(\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) \right)' = \lim_{n \rightarrow \infty} f'_n(x).$$

2. Нека је дат низ функција $f_n : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$,

$$f_n(x) = \frac{\sin nx}{n}, \quad n \in \mathbb{N}.$$

- Доказати да низ (f_n) униформно конвергира ка нула-функцији.
- Доказати да низ извода (f'_n) не конвергира униформно.

3. Нека је функција $\varphi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ дефинисана са

$$\varphi(t) = \begin{cases} t^2(1-t)^2, & t \in [0, 1], \\ 0, & t \notin [0, 1]. \end{cases}$$

За $x \in (0, 1)$ дефинишимо низ функција

$$f_n(x) = \frac{1}{n} \varphi(n(1-x)).$$

- Доказати да је свака функција f_n диференцијабилна на $(0, 1)$.
 - Доказати да $f_n \rightarrow 0$ равномерно на $(0, 1)$.
 - Израчунати $f'_n(x)$ и доказати да $f'_n(x) \rightarrow 0$ за свако $x \in (0, 1)$.
 - Докажите да конвергенција низа (f'_n) није равномерна на $(0, 1)$.
4. * Доказати да степени редови $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-x_0)^n$ и $\sum_{n=1}^{\infty} na_n(x-x_0)^{n-1}$ имају исти радијус конвергенције.
5. * Доказати да је Риманова зета функција $\zeta : (1, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$,

$$\zeta(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^x}$$

бесконечно пута диференцијабилна.